ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

© **А. Л. Багно**[1], **А. М. Тарасьев**[1,2]

[1] ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: bagno.alexander@gmail.com

[2] ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: tam@imm.uran.ru

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение функции цены в задаче управления на бесконечным горизонте с неограниченно растущем подынтегральном индексом, дисконтированном в целевом функционале. Задачи управления такого типа связаны с анализом трендов траекторий в моделях экономического роста. Получено выражение свойств стабильности функции цены в инфинитезимальной форме. Такое представление обеспечивает совпадение функции цены с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона–Якоби. Установлено, что краевое условие для функции цены подменяется свойством подлинейной асимптотики. Приводится пример, иллюстрирующий построение функции цены как обобщенного минимаксного решения в моделях экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление; функция цены; свойства стабильности; уравнения Гамильтона–Якоби; асимптотика; экономический рост

Введение

Условия стабильности играют ключевую роль в теории оптимального управления и теории дифференциальных игр. Они позволяют находить оптимальное управление по принципу обратной связи. Они также обеспечивают основу для разработки конечно-разностных операторов в сеточных методах аппроксимации функции цены [1].

Условия стабильности были введены Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным для теории дифференциальных игр [2] и обобщены в инфинитезимальной форме в теории

Работа выполнена при поддержке Программы УрО РАН (проект № 18-1-1-10).

негладкого анализа (минимаксные решения, вязкостные решения) уравнений в частных производных типа Гамильтона–Якоби [3–7].

Статья посвящена изучению свойств стабильности в инфинитезимальной форме для функций цены в задачах оптимального управления на бесконечном горизонте [8]. В частности, исследуется задача оптимального управления с нелинейной динамикой и подынтегральным индексом качества, который представлен произведением дисконтирующего множителя и неограниченно растущей функции. Эта статья развивает исследование, начатое в работах А. Л. Багно, А. М. Тарасьева [9] и М. С. Никольского [10]. В этих статьях была показана непрерывность функции цены в задачах на бесконечном горизонте и получены оценки параметров непрерывности по Гельдеру.

Отметим, что аналогичные задачи рассматривались в статьях Р. А. Адиатулиной, А. М. Тарасьева [11], А. И. Субботина [3], И. Ц. Капуццо Дольчетта [12], Г. Клаассена, А. М. Тарасьева, А. М. Кряжимского [13], А. М. Тарасьева [14].

Следует отметить, что задачи оптимального управления [8] на бесконечном горизонте возникают в моделях экономического роста [15] и в задачах стабилизации движения как базовый элемент их анализа.

1. Динамика системы и функция цены

В статье изучается следующая нелинейная задача оптимального управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ (P — компактное множество). Функционал качества задается соотношением

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))d\tau, \qquad \lambda > 0,\ t_0 > 0. \tag{2}$$

Предполагается, что выполняются следующие условия.

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Условие Липшица по аргументу x: для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и для любого p

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|,$$

$$|h(x_1, p) - h(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{3}$$

где L — константа Липшица.

3. Условие подлинейного роста по аргументу x: для любых x, p

$$\|f(x, p)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{4}$$

$$|h(x, p)| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{5}$$

где $\varkappa$ — положительная константа.

Введем переменную

$$\widetilde{y} = e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)).$$

Определим функцию цены согласно И. Ц. Капуццо Дольчетта [12]. Пусть $u(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на конечном интервале времени $[t_0, T]$. Определим U_T как множество управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0, T]$.

Определение 1. *Функцией цены в задаче с конечным горизонтом* для начальной точки (t_0, z_0), где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется функция

$$w_T(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \left(\widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right),$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет динамике (1) на интервале $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

В дополнение мы определим функцию цены в задаче с бесконечным горизонтом. Обозначим символом U множество всех измеримых по Лебегу программных управлений $u(\cdot)$ на бесконечном интервале $[t_0, +\infty)$.

Определение 2. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной точки (t_0, z_0), где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется функция

$$w(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(\widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right), \tag{6}$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет динамике (1) на интервале $[t_0, +\infty)$, $x(t_0) = x_0$.

Отметим, что

$$w_T(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \left(-\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right) =$$

$$= -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right).$$

Если мы определим функцию $g(x, u) = -h(x, u)$, $y = -\widetilde{y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, тогда мы сможем записать

$$w_T(t_0, z_0) = -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right) = -\omega_T(t_0, z_0)$$

и рассматривать функцию $\omega_T(t_0, z_0)$ как функцию цены. Функция h удовлетворяет условиям (3) и (5), и следующие соотношения эквивалентны

$$y = -\widetilde{y} = -e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) = e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))$$

для переменной y.

Введем для функции $w(t_0, z_0)$ ее аналог

$$w(t_0, z_0) = - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(-\widetilde{y}_0 - \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right) =$$

$$= - y_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(\int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right) = -\omega(t_0, z_0).$$

Наша задача — проанализировать свойства функции $\omega(t_0, z_0)$.

2. Условия стабильности для функции цены

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть $t \in [0, +\infty)$, $u \in P$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $S = \{s \in \mathbb{R}^m : \|s\| = 1\}$. Положим

$$F_1(t, x) = \mathrm{co}\{(f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)) : u \in P\},$$

$$F_2(t, x, u) = (f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)).$$

Здесь символом $\mathrm{co}\{x : x \in X\}$ обозначена выпуклая оболочка X. Определим гамильтониан задачи оптимального управления соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u\in P} (\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u)).$$

Обозначим символом $Z_1(t, z)$ множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих интервал $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду дифференциальному включению

$$\dot{z}(\tau) \in F_1(\tau, x(\tau)),$$

с начальным условием $z(t) = z_0$, где $\tau \in [t, +\infty]$. Обозначим символом $Z_2(t, z, u)$ множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих интервал $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду дифференциальному включению

$$\dot{z}(\tau) = F_2(\tau, x(\tau), u), \quad u \in P,$$

с начальным условием $z(t) = z_0$, где $\tau \in [t, +\infty]$.

Будем следовать терминологии монографии Н. Н. Красовского [2], где движения из множеств $Z_1(t, z)$, $Z_2(t, z, u)$ называются *обобщенными движениями*. Обобщенные движения удовлетворяют следующему условию.

Лемма 1. *Пусть* $t_0 \in [0, +\infty)$, $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, *и движение* $z(t) = (x(t), y(t))$, *где* $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, *лежат в множестве* $Z_1(0, (x_0, 0))$. *Тогда движение* $z_*(t) = (x(t - t_0), e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0)$ *тоже лежит в множестве* $Z_1(0, (x_0, 0))$, *здесь* $t \in [t_0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть $\lambda > \varkappa$, тогда справедлива следующая оценка*

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant A + B\|x_0\| \tag{7}$$

для функции цены задачи оптимального управления на бесконечном горизонте. Здесь $A = |y_0| + \dfrac{\varkappa}{\lambda}e^{-\lambda t_0}$, $B = \dfrac{1}{\lambda - \varkappa}e^{-\lambda t_0}$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

В статье [9] доказано, что функция цены $\omega(t, z)$ представима в виде

$$\omega(t, z) = y + e^{-\lambda t}\omega(0, x, 0).$$

Будем в дальнейшем рассматривать функцию $v(x) = \omega(0, (x, 0))$ и называть ее *стационарной функцией цены.*

Теорема 2. *Пусть $\lambda > \varkappa$, тогда функция $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ является функцией цены задачи оптимального управления* (1) (2)*, тогда и только тогда, когда следующие условия верны:*

1. *функция φ непрерывна и ограничена*

$$|\varphi(x)| \leqslant A + B\|x\|;$$

2. *движения $z(t) = (x(t), y(t))$ из множества $Z_1(0, (x, 0))$, где $y(t) = e^{-\lambda t}g(x(t), u(t))$, удовлетворяют неравенству*

$$e^{-\lambda t}\varphi(x(t)) + y(t) \leqslant \varphi(x) \tag{8}$$

для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$;

3. *движения $z(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) = e^{-\lambda t}g(x(t), u(t))$, из множества $Z_2(0, (x, 0), u)$, удовлетворяют неравенству*

$$e^{-\lambda t}\varphi(x(t)) + y(t) \geqslant \varphi(x) \tag{9}$$

для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Функция цены как минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

В этом разделе мы рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle \nabla\varphi, f(x, u)\rangle + g(x, u)) = 0. \tag{10}$$

Введём некоторые обозначения и определения.

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| = 1\},$$

$$A(x) = \{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|)\},$$

$$A_u(x, q) = \{f \in A(x) : \langle f, q\rangle \geqslant H(x, q)\}$$

$$A_l(x,p)=\{f\in A(x):\langle f,p\rangle\leqslant H(x,p)\},$$

где $q,p\in\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что условие $\lambda>\varkappa$ выполняется. Обозначим символом $X_u(x,q)$ ($X_l(x,p)$ множество абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих дифференциальному включению для почти всех t

$$\dot{x}(t)\in A_u(x,q)\quad(\dot{x}(t)\in A_l(x,p)).$$

Верхнее решение уравнения (10) определяется как полунепрерывная снизу функция $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, для которой существует функция $z_u=(x_u(\cdot),y_u(\cdot))\in X_u(x,q)$, удовлетворяющая условию (11) для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\tau>0$, $q\in S$

$$e^{-\tau}\varphi(x_u(\tau))+y_u(\tau)\leqslant\varphi(x). \tag{11}$$

Нижнее решение уравнения (10) определяется как полунепрерывная сверху функция $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, для которой существует функция $z_l=(x_l(\cdot),y_l(\cdot))\in X_l(x,p)$, удовлетворяющая условию (12) для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\tau>0$, $p\in S$

$$e^{-\tau}\varphi(x_l(\tau))+y_l(\tau)\geqslant\varphi(x). \tag{12}$$

Непрерывная функция $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, которая является верхним и нижним решением уравнения (10) одновременно, называется *минимаксным решением* уравнения.

Нижней (верхней) производной Дини по направлению d называется функция

$$\partial_-\omega(x)|(d)=\lim_{\varepsilon\to0}\inf_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)}\frac{\omega(x+\delta d')-\omega(x)}{\delta}$$

$$\left(\partial_+\omega(x)|(d)=\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)}\frac{\omega(x+\delta d')-\omega(x)}{\delta}\right),$$

где $\Delta_\varepsilon(x,d)=\{(\delta,d')\in(0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^n:\|d-d'\|\leqslant\varepsilon\}$.

Следующие два утверждения эквивалентны условиям стабильности (8), (9) [10].

Утверждение 1. *Пусть φ —непрерывная функция. Тогда условия* (8) *и* (9) *эквивалентны условиям* (13), (14)*:*

$$\min_{d=(d_1,d_2)\in A_u(x,q)}\{d_2+\partial_-\varphi(x)|(d_1)\}-\varphi(x)\leqslant0, \tag{13}$$

$$\max_{d=(d_1,d_2)\in A_l(x,p)}\{d_2+\partial_+\varphi(x)|(d_1)\}-\varphi(x)\geqslant0. \tag{14}$$

Утверждение 2. *Пусть φ — непрерывная функция. Тогда условия* (13), (14) *эквивалентны условиям* (15), (16)*:*

$$\sup_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s,d\rangle-\partial_-\varphi(x)|(d)\}\geqslant-\varphi(x)+H(x,s), \tag{15}$$

$$\inf_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s,d\rangle-\partial_+\varphi(x)|(d)\}\leqslant-\varphi(x)+H(x,s). \tag{16}$$

Лемма 2. *Любое нижнее решение уравнения* (10)*, удовлетворяющее условиям подлинейного роста* (4)*,* (5)*, не превосходит любого верхнего решения:*

$$\varphi_u(x) \geqslant \varphi_l(x).$$

Теорема 3. *Пусть минимаксное решение уравнения* (10) *удовлетворяет условию подлинейного роста* (7)*. Тогда это решение единственно.*

Используя результаты теории минимаксных решений [3], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Стационарная функция цены* v *задачи* (1)*,* (2) *является минимаксным решением уравнения* (10)

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle\nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0,$$

когда удовлетворяет условию подлинейного роста (7)*.*

П р и м е р 1. Пример построения функции цены. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)} = f(\tau) - g(\tau)\,\frac{u(\tau)}{x(\tau)}, \quad x(t_0) = x_0. \tag{17}$$

Эта модель включает производство $x = x(\tau)$, темп роста производства $\frac{\dot{x}}{x}$, уровень технологий $u = u(\tau)$ и функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, которые зависят от производственных факторов: труда, капитала, материалов и энергии. Функция $g(\tau) = p(\tau) - q(\tau)$ описывает сетевой эффект инвестиций в новые технологии как разность между текущими инвестициями $p(\tau)$ и краткосрочной отдачей от инвестиций $q(\tau)$. Мы будем рассматривать уравнение (17) как уравнение баланса расходуемых ресурсов между уровнем производства $\frac{\dot{x}}{x}$ и интенсивностью инвестиций $\frac{\dot{u}}{x}$. Отрицательный знак ($-g(\tau)$) сетевого эффекта инвестиций означает, что в краткосрочной перспективе эффект инвестиций $p(\tau)$ может превышать краткосрочную отдачу $q(\tau)$ от инвестиций. Уровень инвестиций u является управляющим параметром.

Введём функционал качества, представленный интегралом с дисконтирующим множителем λ

$$U = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda(\tau - t_0)} \ln D(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

Здесь $\ln D(\tau) = (\ln x(\tau) + A\ln u(\tau))$, $A = (1-\alpha)/\alpha$. Индекс потребления $D(\tau)$ включает в себя уровень производимой продукции $\ln x(\tau)$ и отдачу от инвестиций в долгосрочной перспективе $\ln u(\tau)$. Параметр α устанавливает значение коэффициента эластичности ($0 < \alpha < 1$). Здесь t_0 — начальный момент времени и τ — текущий момент времени.

Структура функционала качества (18) означает, что инвесторов интересует как рост индекса производства $\ln x$, так и рост индекса новых инновационных продуктов $A\ln u$

в долгосрочной перспективе, который обеспечивается уровнем инвестиций в новые технологии u.

Задача состоит в нахождении такой инвестиционной стратегии $u^0(\tau)$ и соответствующей оптимальной траектории роста производства $x^0(\tau)$, которые удовлетворяют динамике (17) и максимизируют функционал качества (18).

Применяя принцип максимума Понтрягина к задаче управления (17), (18) и предполагая, что функция $f(\tau)$ является неубывающей и удовлетворяющей условию $f(\tau)-(1-\alpha)\lambda \geq 0$, мы получим оптимальное решение с экспоненциально растущим производством x

$$x(\tau)=x_0 e^{Q(\tau)}, \quad x_0=x(t_0),$$

где

$$Q(\tau)=\int_{t_0}^{\tau}(f(s)-(1-\alpha)\lambda)ds.$$

Кроме того, выводится соотношение для оптимальной стратегии инвестиций $u=u^0$ по принципу обратной связи как функции текущего состояния производства x

$$u(\tau)=\frac{(1-\alpha)\lambda}{g(\tau)}x(\tau).$$

Это уравнение означает, что оптимальные инвестиции в новые технологии u увеличиваются пропорционально росту производства x с коэффициентом пропорциональности $(1-\alpha)\lambda/g(\tau)$. Для интенсивности развития u/x мы имеем следующую формулу

$$\frac{u(\tau)}{x(\tau)}=\frac{(1-\alpha)\lambda}{g(\tau)},$$

которая описывает зависимость оптимальной интенсивности исследований от параметра эластичности α, дисконтирующего параметра λ и предельной производительности технологий ($g(\tau)$). Отметим, что когда стоимость $p(\tau)$ для поддержания накопленных инвестиций в новые технологии высока, интенсивность исследований u/x низка. С другой стороны, увеличение уровня отдачи от инвестиций $q(\tau)$ приводит к росту интенсивности исследований u/x. Предполагая, что положительнозначная функция $g(\tau)$ не убывает в течение времени τ, мы получим свойство роста интенсивности развития u/x.

Наконец, мы рассмотрим функцию цены $(t,y)\rightarrow\varphi(t,y)$, которая определяет оптимальный результат φ функционала качества (18) вдоль оптимального процесса $(x^0(\tau),$ $u^0(\tau))$ с динамикой (17) и начальной позицией (t,y), $t=t_0$, $y=x_0$.

Посчитаем функцию цены в нашем примере как минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial\varphi(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(t,y)}{\partial y}f(t)y+e^{-\lambda t}\ln y+\max_u\Big\{-\frac{\partial\varphi(t,y)}{\partial y}g(t)u+e^{-\lambda t}A\ln u\Big\}=0. \quad (19)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, для уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби (19), мы получим аналитическую формулу для минимаксного решения, которое совпадает с функцией цены

$$\varphi(t,y)=e^{-\lambda t}\big(\mu(y)+\nu(t)\big), \quad (20)$$

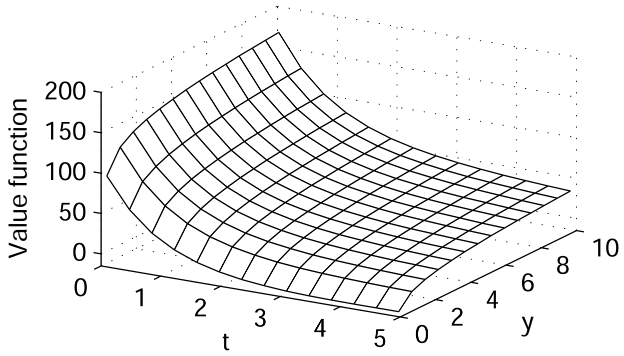

Рис. 1: Функция цены для $f(\tau) = e^{-\tau}$, $g(\tau) = 1/(1 + 0.5e^{-\tau+5})$, $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.1$

$$\mu(y) = \frac{(A+1)}{\lambda} \ln y, \quad \nu(t) = -\int_t^{+\infty} e^{-\lambda(\tau - t)} h(\tau) d\tau. \tag{21}$$

Здесь

$$h(\tau) = A \ln g(\tau) - \tfrac{A+1}{\lambda} f(\tau) - A(\ln(1-\alpha) - \ln \lambda - 1). \tag{22}$$

В частности, если h — константа, $h(\tau) \equiv h$, то ν также константа, определяемая формулой $\nu = -h/\lambda$.

Для примера, посчитаем функцию цены, когда $f(\tau) = e^{-\tau}$, $g(\tau) = 1/(1 + 0.5e^{-\tau+5})$, $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.1$. Функции $h(\tau)$, $\mu(y)$, $\nu(t)$ (21, 22) определены в этом случае

$$h(\tau) = \ln\left(\frac{1}{1 + 0.5e^{-\tau+5}}\right) - \frac{4}{3}e^{-\tau} - 2.099, \ \mu(y) = \frac{4}{3}\ln(y), \ \nu(t) = -\int_t^{+\infty} e^{-\lambda(\tau-t)} h(\tau) d\tau.$$

График функции цены представлен на рис. 1.

Отметим, что в рассматриваемой модели оптимальный результат обладает свойством разложения. А именно, первое слагаемое μ зависит только от дисконтирующего параметра λ, параметра эластичности α в функционале качества (18), и от начального производства y, и не зависит от особенностей функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ в динамической системе (17). Второе слагаемое ν определяется главным образом динамикой (17), представленной функцией $h(\tau)$ (22) и не зависит от начального уровня производства y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173-185.

2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

3. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.

4. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559-564.

5. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: УрО РАН, 2013. 244 с.

6. *Султанова Р.А.* Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1995. 192 с.

7. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1-42.

8. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального роста // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 2007. Т. 257. С. 5-271.

9. *Багно А.Л., Тарасьев А.М.* Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 3-14.

10. *Никольский М.С.* О локальной липшицевости функции Беллмана в одной оптимизационной задаче // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 106-115.

11. *Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.* Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531-537.

12. *Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H.* Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11. № 2. P. 161-181.

13. *Klaassen G., Tarasyev A.M., Kryazhimskii A.V.* Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. Vol. 120. № 1. P. 147-179.

14. *Tarasyev A.M.* Control synthesis in grid schemes for Hamilton–Jacobi equations // Annals of Operations Research. 1999. Vol. 88. P. 337-359.

15. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория; пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.

Поступила в редакцию 9 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 17 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Багно Александр Леонидович, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики, e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Тарасьев Александр Михайлович, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. отделом динамических систем, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор, e-mail: tam@imm.uran.ru

Для цитирования: *Багно А.Л., Тарасьев А.М.* Асимптотика функции цены в моделях экономического роста // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 605–616. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

ASYMPTOTICS OF VALUE FUNCTION IN MODELS OF ECONOMIC GROWTH

A. L. Bagno[1)], **A. M. Tarasyev**[1,2)]

[1)] Ural Federal University,
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: bagno.alexander@gmail.com
[2)] Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: tam@imm.uran.ru

Abstract. Asymptotic behavior of the value function is studied in an infinite horizon optimal control problem with an unlimited integrand index discounted in the objective functional. Optimal control problems of such type are related to analysis of trends of trajectories in models of economic growth. Stability properties of the value function are expressed in the infinitesimal form. Such representation implies that the value function coincides with the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi equation. It is shown that that the boundary condition for the value function is substituted by the property of the sublinear asymptotic behavior. An example is given to illustrate construction of the value function as the generalized minimax solution in economic growth models.

Keywords: optimal control; value function; stability properties; Hamilton–Jacobi equations; asymptotics; economic growth

REFERENCES

1. Tarasyev A.M., Uspenskiy A.A., Ushakov V.N. Approksimatsionnyye skhemy i konechno-raznostnyye operatory dlya postroyeniya obobshchennykh resheniy uravneniy Gamil'tona–Yakobi [Approximate schemes and finite-difference operators for construction of the generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1994, no. 3, pp. 173-185. (In Russian).

2. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).

3. Subbotin A.I. *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p. (In Russian).

4. Subbotin A.I., Tarasyev A.M. Sopryazhennyye proizvodnyye funktsii tseny differentsial'noy igry [Conjugate derivatives of the value function of a differential game]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1985, vol. 283, no. 3, pp. 559-564. (In Russian).

5. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi–Bellmana* [The Method of Characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman Equation]. Ekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2013, 244 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Program of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project № 18-1-1-10).

6. Sultanova R.A. *Minimaksnyye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Minimax Equations Solutions with Partial Derivative. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Ekaterinburg, 1995, 192 p. (In Russian).

7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1-42.

8. Aseyev S.M., Kryazhimskiy A.V. Printsip maksimuma Pontryagina i zadachi optimal'nogo rosta [The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2007, vol. 257, pp. 5-271. (In Russian).

9. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Svoystva funktsii tseny v zadachakh optimal'nogo upravleniya s beskonechnym gorizontom [Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3-14. (In Russian).

10. Nikolskii M.S. O lokal'noy lipshitsevosti funktsii Bellmana v odnoy optimizatsionnoy zadache [On the local Lipschitz property of the Bellman function in an optimization problem]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2004, vol. 10, no. 2, pp. 106-115. (In Russian).

11. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M. Differentsial'naya igra neogranichennoy prodolzhitel'nosti [A differential game of unlimited duration]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 531-537. (In Russian).

12. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz.*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161-181.

13. Klaassen G., Tarasyev A.M., Kryazhimskii A.V. Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004,vol. 120, no. 1, pp. 147-179.

14. Tarasyev A.M. Control synthesis in grid schemes for Hamilton–Jacobi equations. *Annals of Operations Research*, 1999, vol. 88, pp. 337-359.

15. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Philadelphia, SIAM, 2002. 529 p.

Received 9 April 2018
Reviewed 17 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Bagno Alexander Leonidovich, Ural Federal University named after B.N. Eltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Tarasyev Alexander Mikhailovich, Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Science Academy, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of the Physics and Mathematics, Ural Federal University named after B.N. Eltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, professor, e-mail: tam@imm.uran.ru

For citation: Bagno A.L., Tarasyev A.M. Asymptotika funktsii tseny v modelyakh economicheskogo rosta [Asymptotics of Value Function in Models of Economic Growth]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 605–616. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616 (In Russian, Abstr. in Engl.).